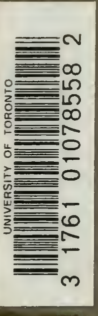
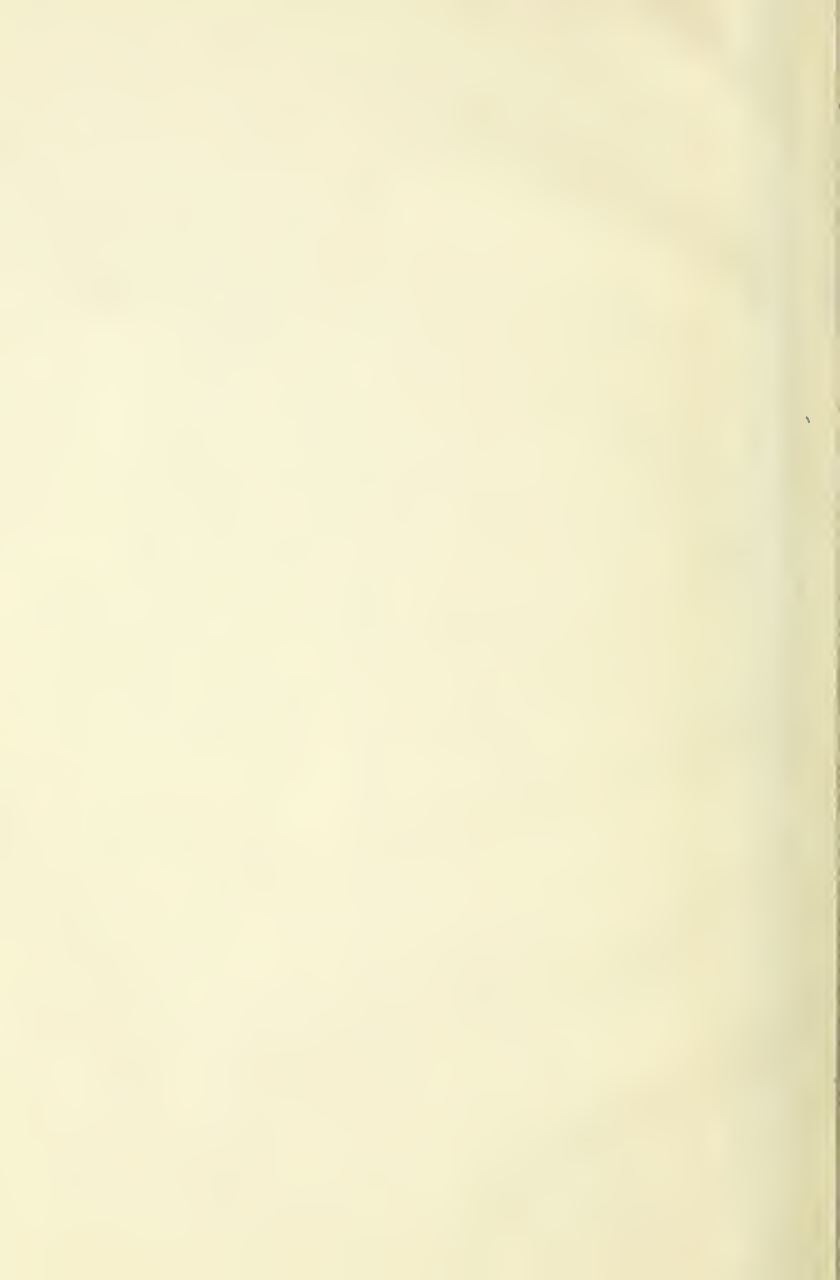
Methode.









Aus dem XCII. Bande der Sitzb. der kais. Akad. der Wissensch. II. Abth. Dec.-Heft. Jahrg. 1885.

Über die Bestimmung von M bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn, mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall.

Von Prof. Dr. E. Weiss,
wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. December 1885.)

Olbers hat in seiner berühmten Abhandlung „Über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Kometen zu berechnen“ als Grundgedanken seiner Methode die Annahme hingestellt, dass die Chorden der Kometen- und Erdbahn von ihrem mittleren Radiusvector im Verhältnisse der Zeiten geschnitten werden. Er zeigt hierauf, auf rein geometrische Betrachtungen gestützt, dass unter dieser Annahme das Verhältniss der geocentrischen Distanzen des Kometen in der ersten und dritten Beobachtung durch die einfache Relation $\rho_3 = M\rho_1$ gegeben erscheint, und dass die Bahn dann nicht durch den mittleren Kometenort selbst, sondern nur durch den grössten Kreis hindurchgeht, der durch diesen und den mittleren Sonnenort gelegt ist. Das Letztere ist eigentlich von vorneherein klar, indem alle Radien der Kometen- und Erdbahn im Mittelpunkte der Sonne sich schneiden, also je zwei immer in einer Ebene, oder auf die Sphäre projicirt in einem grössten Kreise liegen müssen: merkwürdigerweise wurde aber mit der Zeit gerade dieses Moment als das eigentlich characteristische der Olbers'schen Methode so sehr in den Vordergrund gestellt, dass die ursprüngliche Idee, welche den Verfasser zum Auffinden derselben leitete, nach und nach fast ganz verschollen ist. So sagt schon Encke im Berliner Jahrbuche von 1833 bei der Darstellung der Olbers'schen Methode: „Das Olbers'sche Princip kann mit Bessel am einfachsten so ausgedrückt werden, dass die Bahn, während sie in aller Schärfe durch die äussersten

Örter geht, auch dem, die mittleren Örter der Sonne und des Kometen verbindenden grössten Kreise entspricht". Indem man aber dies als das Princip der Olbers'schen Methode hinstellt, führt man in das Problem der Bahnbestimmung einen neuen Begriff, die Neigung eines grössten Kreises ein, der demselben völlig fremd ist und nur die Erkenntniss der Verhältnisse erschwert hat, welche bei der Berechnung von M massgebend sind.

Dass diese Behauptung nicht unbegründet sei, erhellt wohl schon daraus, dass, wie eben erwähnt wurde, Erwägungen ganz anderer Art Olbers zur Erfindung seiner schönen Methode führten; noch klarer aber erkennt man es durch Behandlung der Frage vom analytischen Standpunkte aus. Legen wir nämlich unseren weiteren Betrachtungen als Fundamentalebene die Ekliptik zu Grunde und bezeichnen wir mit x_a, y_a, z_a die geocentrischen Coordinaten eines Himmelskörpers, mit X_a, Y_a die Coordinaten der Sonne, indem wir dem Index a den Werth 1, 2 oder 3 beilegen, je nachdem sich die Coordinaten auf die 1., 2. oder 3. Beobachtung beziehen; bezeichnen wir ferner mit $[r_a r_b]$ den doppelten Flächeninhalt des von den Radien r_a und r_b eingeschlossenen Dreieckes, so liefert der Umstand, dass die drei Orte des Himmelskörpers in einer durch den Mittelpunkt der Sonne hindurchgehenden Ebene liegen, bekanntlich die drei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}[][r_2 r_3](x_1-X_1)-[r_1 r_3](x_2-X_2)+[r_1 r_2](x_3-X_3)&=0\\ [r_2 r_3](y_1-Y_1)-[r_1 r_3](y_2-Y_2)+[r_1 r_2](y_3-Y_3)&=0\\ [r_2 r_3]z_1-[r_1 r_3]z_2+[r_1 r_2]z_3&=0.\end{aligned}\right\}\quad 1)$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man nun die drei geocentrischen Distanzen ρ_1, ρ_2, ρ_3 des Himmelskörpers als Functionen seiner Elemente berechnen, oder auch umgekehrt aus drei geocentrischen Distanzen mit Zuhilfenahme der Keppler'schen Gesetze seine Bahnelemente ermitteln. Dies letztere geschieht auch bei der Bestimmung einer Bahn ohne Voraussetzung des Kegelschnittes.

Setzt man jedoch im Voraus die Natur der Bahn fest, also mit Rücksicht auf das Kometenproblem, dass sie eine Parabel sei, so ist die Aufgabe durch die drei obigen Gleichungen bekanntlich überbestimmt. Denn man darf jetzt nur noch zwei

geocentrische Distanzen als gegeben annehmen und ermittelt aus diesen mit Zuhilfenahme der bei parabolischen Bewegungen geltenden Gesetze die Bahnelemente, kann daher nicht mehr alle drei der obigen Gleichungen verwenden, sondern muss eine derselben unberücksichtigt lassen. Mit dem Weglassen der einen Gleichung verzichtet man aber zugleich auch darauf, dass sie durch die Elemente und die der Berechnung zu Grunde gelegten Beobachtungen völlig befriediget werde; mit anderen Worten, dass die gefundene Bahn alle Beobachtungen vollständig darstellt.

Um die Beobachtungsfehler möglichst unschädlich zu machen, wird man es stets vorziehen, die Elemente aus den äussersten Orten zu berechnen, daher ρ_2 aus zwei der Gleichungen 1) eliminiren. Welche zwei man hiebei verwendet, hängt von Umständen ab. Wollte man beispielsweise nur die Länge der mittleren Beobachtung benützen, so müsste man die erste und zweite der Gleichungen 1) mit einander combiniren, würde die erste mit y_2, die zweite mit x_2 multipliciren, und dann beide subtrahiren. Das Resultat wäre:

$$[r_2 r_3]\{y_2(x_1-X_1)-x_2(y_1-Y_1)\}+[r_1 r_3]\{y_2 X_2-x_2 Y_2\}+ \\ +[r_1 r_2]\{y_2(x_3-X_3)-x_2(y_3-Y_3)\}=0. \qquad 2)$$

Diese Gleichung kann durch $\rho_2 \cos\beta_2$ dividirt werden, weil sowohl x_2 als y_2 diesen Factor enthalten. Dadurch fallen ρ_2 und β_2 vollständig aus, und es wird die zwischen ρ_1 und ρ_3 stattfindende Relation, abgesehen von den anderen darin vorkommenden Grössen, blos von der Länge des zweiten Ortes, nicht aber von seiner Breite abhängen. Einen solchen Vorgang wird man indess wo möglich vermeiden, weil man sich dadurch schon von vornherein des Vortheiles begibt, die Relation zwischen der ersten und dritten Distanz des Kometen auf die einfache Form $\rho_3 = M\rho_1$ zu bringen, worin ja eben der Vorzug und die grosse Kürze der Olbers'schen Methode begründet ist.

Zählt man nämlich die Längen nicht vom Frühlingsnachtgleichenpunkte, sondern von einem Punkte aus, dessen Länge Π ist, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} x_a &= \rho_a \cos\beta_a \cos(\lambda_a-\Pi) & X_a &= R_a \cos(L_a-\Pi) \\ y_a &= \rho_a \cos\beta_a \sin(\lambda_a-\Pi) & Y_a &= R_a \sin(L_a-\Pi) \\ z_a &= \rho_a \sin\beta_a & Z_a &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Dies in die Gleichung 2) eingeführt, liefert nach Abkürzung mit $\rho_2 \cos\beta_2$

$$[r_2 r_3](\rho_1 \cos\beta_1 \sin(\lambda_2-\lambda_1)-R_1 \sin(\lambda_2-L_1))+[r_1 r_3]R_2 \sin(\lambda_2-L_2)+$$
$$+[r_1 r_2](\rho_3 \cos\beta_3 \sin(\lambda_2-\lambda_3)-R_3 \sin(\lambda_2-L_3))=0. \qquad 2^*)$$

Es ist daher durch die Elimination von $\rho_2 \cos\beta_2$ auch der willkürliche Winkel Π wegfallen, und damit die Möglichkeit, den in der Gleichung vorkommenden Parametern bestimmte Werthe zu ertheilen.

Eliminirt man hingegen ρ_2, aus der Combination zweier anderer Gleichungen, etwa aus der zweiten und dritten, so erhält man zunächst auf leicht ersichtliche Weise:

$$[r_2 r_3]\{z_2(y_1-Y_1)-z_1 y_2\}+[r_1 r_3]z_2 Y_2+[r_1 r_2]\{z_2(y_3-Y_3)-y_2 z_3\}=0 \quad 4)$$

Substituirt man nun darin wieder für die Coordinaten ihre Werthe aus 3), so resultirt nach der Division mit dem gemeinsamen Factor ρ_2:

$$[r_2 r_3]\rho_1(\cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin(\lambda_1-\Pi)-\sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\Pi))+$$
$$+[r_1 r_2]\rho_3(\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3-\Pi)-\cos\beta_2 \sin\beta_3 \sin(\lambda_2-\Pi))=$$
$$=\{[r_2 r_3]R_1 \sin(L_1-\Pi)-[r_1 r_3]R_2 \sin(L_2-\Pi)+$$
$$+[r_1 r_2]R_3 \sin(L_3-\Pi)\}\sin\beta_2=0 \qquad 4^*)$$

Die Verbindung der ersten und dritten Gleichung würde zu keinem von diesem verschiedenen Resultate führen: es liefe blos auf eine Vertauschung der Achsen der x und y oder auf eine Substitution von $\Pi+90°$ statt Π hinaus.

Die obige Gleichung, welche eine der Fundamentalgleichungen des Kometenproblems darstellt, unterscheidet sich von der früheren 2*) dadurch, dass in ihr nicht blos die Länge, sondern auch die Breite des mittleren Ortes, also dieser vollständig vorkommt, und dass in ihr noch die völlig willkürliche Grösse Π enthalten ist, über die man zur Erzielung von Erleichterungen und Vereinfachungen im Allgemeinen frei verfügen darf.

Dividirt man die Gleichung 4*), um sie in eine für ihre Berechnung bequemere Form zu bringen durch $\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\Pi)$ und führt man zur Abkürzung die Hilfsgrösse J ein, mittelst der Substitution:

$$\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - \Pi)} \qquad 5)$$

so nimmt sie die etwas geschmeidigere Gestalt an:

$$\begin{aligned}
&[r_2 r_3] \rho_1 \{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - \Pi) \operatorname{tg} J - \sin\beta_1\} + \\
&[r_1 r_2] \rho_3 \{\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \Pi) \operatorname{tg} J - \sin\beta_3\} = \\
&= \operatorname{tg} J \{[r_2 r_3] R_1 \sin(L_1 - \Pi] - [r_1 r_3] R_2 \sin(L_2 - \Pi) + \\
&+ [r_1 r_2] R_3 \sin(L_3 - \Pi)\} \qquad 6)
\end{aligned}$$

Der Winkel J spielt hier einfach die Rolle einer zur Erleichterung der Berechnung eingeführten Hilfsgrösse, und hat in Folge dessen auch für das Problem keine andere Bedeutung als alle jene Hilfsgrössen, die man zu ähnlichen Zwecken so vielfach benützt. Will man ihn aber geometrisch interpretiren, so stellt die Gleichung 5) allerdings einen grössten Kreis vor, der von der Länge Π aus unter dem Neigungswinkel J durch den mittleren Kometenort gelegt ist. Da nun in der Gleichung 6) die Coordinaten der mittleren Beobachtung nicht weiter vorkommen, anderseits aber eine der Grössen Π oder J völlig willkürlich ist, kann man freilich das Einführen des Hilfswinkels J auch so deuten, dass dadurch die mittlere Beobachtung durch irgend einen durch sie gelegten grössten Kreis ersetzt wird. Es ist nun zweifellos eine sehr bemerkenswerthe Thatsache, dass man die Elimination von ρ_2 aus zwei der Gleichungen 1) auch als ein Ersetzen des mittleren Kometenortes durch einen grössten Kreis auffassen kann: allein das weitere Verfolgen dieses Umstandes führt in das Problem blos ohne Noth ein fremdes Element ein. Denn die Sachlage ist und bleibt doch immer ganz einfach die, dass in die Gleichung 4*) und in die ihr äquivalente 6) der mittlere Kometenort vollständig eingeht, dass er also zur Bestimmung der Relation zwischen der ersten und dritten geocentrischen Distanz des Kometen vollständig herangezogen wird, dass aber bei der Berechnung einer Kometenbahn die mittlere Beobachtung lediglich zu diesem Zwecke dient, und bei der eigentlichen Bestimmung der Elemente nicht weiter in Verwendung kommt, während sie bei der Berechnung einer Planetenbahn auch für das letztere gebraucht wird.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, erkennt man leicht, dass man die Gleichung 4*) auch durch Einführen anderer Hilfs-

Die Gleichung 8*) wird allgemein in der Form aufgeschrieben:

$$\rho_3 = M\rho_1 + m,$$

wobei also bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} \\ m &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_1\tau_2 R_2 \sin(L_2-\Pi)\operatorname{tg}\beta_2}{q\cos\beta_3\sin(Q-\Pi)}\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

Die Berechnung von M mit Hilfe des Formelsystems 7*) gestaltet sich wohl eine Kleinigkeit weitläufiger als nach der jetzt üblichen Form, gewährt aber so viele fundamentale Vortheile, dass dagegen diese geringfügige Mehrarbeit gar nicht in Betracht kommen kann.

In dieser Richtung bemerke ich zuerst, dass man beim Rechnen nach der Formel 9) gar nie eine vorläufige Untersuchung anzustellen braucht, ob der sogenannte Ausnahmefall vorhanden ist oder nicht, man übersieht dies unmittelbar mit einem Blicke. In der Olbers'schen Methode setzt man nämlich $\Pi = L_2$, wodurch $m = 0$ wird; sind jedoch P und Q sehr nahe gleich L_2, so darf man Π nicht gleich L_2 annehmen, weil sich dann der Quotient $\frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)}$ nicht mehr sicher bestimmen liesse: es ist eben der Ausnahmefall eingetreten. Allein auch hier gibt trotzdem die Gleichung 9) ohne Weiteres einen genäherten Werth von M wie man durch folgende Überlegungen erkennt.

Insoweit als die Sicherheit von M durch die Wahl von Π bedingt ist, wird sie nur von dem Bruche $\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)}$ beeinflusst, indem alle anderen in dem Ausdrucke von M vorkommenden Grössen nur aus den Beobachtungsdaten zusammengesetzt sind. Dieser Bruch wird sich nun, als Quotient zweier Sinus desto sicherer bestimmen lassen, je grösser Zähler und Nenner sind, oder da beide gleichbezeichnet sein müssen, je grösser ihre Summe ist. Um daher den zweckmässigsten Werth von Π zu erhalten, wird man $\sin(P-\Pi) + \sin(Q-\Pi)$ zu einem Maximum machen, d. h. den Werth von Π suchen, welcher die Gleichung erfüllt:

$$\cos(P-\Pi) + \cos(P-\Pi) = 0.$$

Er lautet:

$$\operatorname{tg}\Pi = -\frac{\cos P + \cos Q}{\sin P + \sin Q} = -\operatorname{ctg} {}^1\!/_2(P+Q)$$

$$\Pi = {}^1\!/_2(P+Q) \pm 90. \qquad 10)$$

Würde man es vorziehen, die Summe der Quadrate von Zähler und Nenner, d. i. $\sin^2(P-\Pi) + \sin^2(Q-\Pi)$ zu einem Maximum zu machen, so erhielte man zur Bestimmung von Π:

$$\sin 2(P-\Pi) + \sin 2(Q-\Pi) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\Pi = \frac{\sin 2P + \sin 2Q}{\cos 2P + \cos 2Q} = \operatorname{tg}(P+Q)$$

$$2\Pi_1 = P+Q;\ 2\Pi_2 = (P+Q) \pm 180.$$

Der Werth Π_1 ist unbrauchbar, weil für ihn $\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = -1$ wird; Π_2 stimmt mit dem schon oben erhaltenen Werthe überein, man erhält daher wieder genau dasselbe Resultat wie früher.

Das Ergebniss dieser Untersuchungen lässt sich also dahin aussprechen, dass man die sicherste Bestimmung von M erhält, wenn man die Längen von einem Punkte aus zählt, der um 90° von dem arithmetischen Mittel der Knoten der grössten Kreise absteht, welche durch den ersten und zweiten, und zweiten und dritten Kometenort gelegt sind.

Die Einführung der Werthe von Π aus 10) liefert sowohl für den einen als auch den andern derselben:

$$\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = \frac{\cos {}^1\!/_2(P-Q)}{\cos {}^1\!/_2(Q-P)} = 1$$

$$\frac{\sin(L_2-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = \frac{\cos[L_2 - {}^1\!/_2(P+Q)]}{\cos {}^1\!/_2(Q-P)}$$

Bezeichnet man nun die, diesen zweckmässigsten Werthen von Π entsprechenden M und m mit M_0 und m_0, so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{p\cos\beta_1}{q\cos\beta_3} \\ m_0 &= {}^1\!/_2\,\tau_1\,\tau_2\,\frac{R_2 \operatorname{tg}\beta_2 \cos[L_2 - {}^1\!/_2(P+Q)]}{q\cos\beta_3 \cos {}^1\!/_2(Q-P)}\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

Zwischen M_0 und dem einer beliebigen anderen Annahme über Π entsprechenden M findet folgende einfache Relation statt:

$$M = M_0 \cdot \frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} \qquad 12)$$

Lässt man die Grössen τ_1, τ_2 und τ_3 als Grössen erster Ordnung gelten, so ist auch q als eine Grösse erster Ordnung zu betrachten, daher m_0 ebenfalls von der erster Ordnung; es wird desshalb M_0 auch beim Eintreten des Ausnahmefalles stets einen genäherten Werth von M vorstellen. Man kann indess noch einen Schritt weiter gehen. In dem Ausdrucke für m sind bereits Grössen erster Ordnung in Bezug auf denselben, also eigentlich Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt. Hält man nun daran fest, die Zwischenzeiten als Grössen erster Ordnung aufzufassen, so werden auch die während dieser Zwischenzeiten erfolgten Änderungen der Längen und Radienvectoren der Sonne als Grössen erster Ordnung zu bezeichnen sein; es werden folglich auch $R_2 \sin(L_2-\Pi)$ und

$$R_1 \sin(L_1-\Pi) = (R_2+[R_1-R_2]) \sin(L_2-\Pi+[L_1-L_2])$$
$$R_3 \sin(L_3-\Pi) = (R_2+[R_3-R_2]) \sin(L_2-\Pi+[L_3-L_2])$$

nur um Grössen erster Ordnung von einander abweichen; man kann daher in m den Factor $R_2 \sin(L_2-\Pi)$ auch durch $R_1 \sin(L_1-\Pi)$ oder $R_3 \sin(L_3-\Pi)$ ersetzen, ohne dadurch die bisher eingehaltenen Grenzen der Genauigkeit zu ändern, indem man damit wieder nur Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt, die, wie bereits erwähnt wurde, ohnehin auch schon in dem Näherungsausdrucke für m weggelassen sind. Es darf freilich nicht verschwiegen werden, dass die Coëfficienten der Glieder zweiter Ordnung beim Einsetzen von $R_1 \sin(L_1-\Pi)$ und $R_3 \sin(L_3-\Pi)$ statt $R_2 \sin(L_2-\Pi)$ wesentlich grösser ausfallen; indess werden auch bei M schon Glieder gleicher Ordnung vernachlässiget, die sich mit denen von m auf die verschiedenste Weise combiniren können, wodurch dies viel von seiner Bedeutung verliert. So viel ist indess jedenfalls klar, dass man m nicht blos für $\Pi = L_2$, sondern für jeden zwischen L_1 und L_3 liegenden Werth von Π als verschwindend klein betrachten kann, und dass es selbst dann

noch von sehr geringem Einflusse sein wird, wenn man II auch um einige Grade ausserhalb der eben gegebenen Grenzen annimmt.

Dieser Umstand ist, so viel ich weiss, noch nie hervorgehoben worden; er hatte bisher auch keine praktische Bedeutung. Denn wenn man, wie es jetzt allgemein geschieht M durch Einführen der Neigung eines grössten Kreises als Hilfswinkel berechnet, hat man es mit zwei Veränderlichen II und J zu thun, und kann daher ohne die lästigen Formeln, welche zur Kenntniss von M führen, stets wieder von Neuem völlig durchzurechnen, den Einfluss einer Änderung von J oder II auf diese Grösse nicht beurtheilen. Bei Gleichung 12) hingegen erkennt man dies unmittelbar; ausserdem gibt die zweite Gleichung von 11 auch noch, ebenfalls so gut wie ohne Rechnung den Werth m_0 den m bei der günstigsten Wahl von II annimmt. Man kann daher beim Eintreten des Ausnahmefalles nicht nur sofort beurtheilen, in welchem Sinne und Betrage man sich mit II von L_2 entfernen muss, um M mit genügender Sicherheit zu erhalten, sondern auch, wenn man in der Berechnung bis ρ_1, r_1 und r_3 vorgedrungen ist, sich durch eine geringfügige Arbeit sofort überzeugen, wie nahe das angenommene M an dem Besten liegt, das sich aus dem benützten Beobachtungsmaterial gewinnen lässt. Die sicherste Relation, die man den gegebenen Verhältnissen gemäss zwischen ρ_1 und ρ_3 finden kann, lautet nämlich:

$$\rho_3 = \left(M_0 + \frac{m_0}{\rho_1}\right)\rho_1 = M_1\rho_1 \qquad 13)$$

Berechnet man sich daher gleich Anfangs auch noch m_0 soweit es von r_2 unabhängig ist, so ist man in der Lage, sobald man mit irgend einem angenommenen M die Rechung bis zur Vollendung der Versuche durchgeführt und dadurch genäherte Werthe von ρ_1, r_1 und r_3 erlangt hat, nach Gleichung 13) ohne erst die Elementenrechnung vorzunehmen M_1 zu suchen, und zuzusehen, ob es von M so weit abweicht, dass eine Wiederholung der Rechnung sich lohnen würde. Den Werth von r_2, den man zu diesem Zwecke benöthiget, braucht man nur ganz beiläufig zu kennen: es genügt daher die Annahme $r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_3)$ oder auch $\log r_2 = \frac{1}{2}(\log r_1 + \log r_3)$ oder

bei sehr ungleichen Zwischenzeiten $r_2 = r_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}(r_3 - r_1)$ oder $\log r_2 = \log r_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}(\log r_3 - \log r_1)$ völlig.

Die Grössen P und Q sind ausser bei einer sehr unregelmässigen Bewegung des Kometen einander stets sehr nahe gleich; dasselbe gilt daher auch von $P - \Pi$ und $Q - \Pi$. Ich habe nun aus vielfacher Erfahrung die Überzeugung gewonnen, dass, sobald $P - L_2$ (oder was nach dem eben Gesagten fast stets auf dasselbe hinauskommt $Q - L_2$) um mehr als $\pm 10°$ von $0°$ oder $180°$ abweicht, man die Olbers'sche Methode noch ganz gut anwenden kann, vorausgesetzt, dass man hiebei M nach den Formeln 7*) und 9*) und nicht mittelst Einführen des Hilfswinkels: $\operatorname{tg} J = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}$ berechnet. Dieser Vorbehalt ist darin begründet, dass man nach diesen Formeln M_0 stets, auch beim Ausnahmefalle, mit jener Sicherheit erhält, die mit den zu Grunde gelegten Daten erreichbar ist, und die Unsicherheit erst durch den Factor $\frac{\sin(P - \Pi)}{\sin(Q - \Pi)}$ bedingt wird, während man durch das Einführen von $\operatorname{tg} J$ nicht selten gleich anfangs eine Unsicherheit in die Rechnung hineinträgt und dann durch alle weiteren Stadien mitschleppt.

Weicht jedoch $P - L_2$ von $0°$ oder $180°$ weniger als $\pm 10°$ ab, so fängt der Quotient $\frac{\sin(P - L_2)}{\sin(Q - L_2)}$ an, erheblich unsicher zu werden. Entfernt man sich aber mit Π von L_2 so weit, dass $P - \Pi$ von $0°$ oder $180°$ einmal um $+\alpha°$ das anderemal um $-\alpha°$ abweicht, so wird der Quotient $\frac{\sin(P - \Pi)}{\sin(Q - \Pi)}$ in beiden Fällen sehr nahe den inversen Werth annehmen, d. h. es wird sehr nahe sein:

$$\frac{\sin(P - \Pi_{+\alpha})}{\sin(Q - \Pi_{+\alpha})} = 1 : \frac{\sin(P - \Pi_{-\alpha})}{\sin(Q - \Pi_{-\alpha})}$$

Der Grund dieser Erscheinung liegt darin. Aus Gleichung 13) ist ersichtlich, dass $M_1 \lesseqgtr M_0$ sein wird, je nachdem $m_0 \lesseqgtr 0$, d. h. positiv oder negativ ist. Das Zeichen von m_0 wechselt aber nach 11) je nachdem $r_2 \gtreqless R_2$ ist; es wird daher von den Quo-

tienten $\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)}$ der eine dem Falle $r_2 > R_2$, der andere dem umgekehrten $r_2 < R_2$ entsprechen.

Dies ist ein sehr guter Wink für die Behandlung des Ausnahmefalles. Entfernt man sich nämlich, wenn er eintritt, mit Π von L_2 in jener Richtung so weit, in welcher mit der geringsten Differenz von L_2 der Bogen $P-\Pi$ von 0° oder 180° um unsere oben angegebene Grenze $\pm 10°$ abweicht und sei dann der Werth des Quotienten:

$$\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = k$$

so rechne man mit den beiden Werthen: $M' = kM_0$ und $M'' = \frac{1}{k} M_0$ so weit, bis man erkennt, ob der Komet innerhalb oder ausserhalb der Erdbahn sich befindet; dies entscheidet über das Zeichen von m_0, und damit darüber, welches von den beiden M' oder M'' das richtige ist: mit diesem einen führt man dann die Rechnung zu Ende.

Man kann übrigens bekanntlich, auch ohne das Lambert'sche Kriterium anzuwenden, oft schon von vornherein entscheiden, ob der Komet weiter von der Erde steht oder nicht, und kann sich dann die Doppelrechnung ganz ersparen. Sind z. B. die Elongationen des Kometen von der Sonne (ψ_1 und ψ_3) grösser als 90°, so sind r_1 und r_3 grösser als R_1 und R_3, also auch $r_2 > R_2$; das Zeichen von m_0 ist sohin unmittelbar bekannt, und dadurch sofort das eine, M' oder M'' ausgeschlossen.

Es verdient auch bemerkt zu werden, dass, wenn man darauf verzichtet, sich durch Berechnung der Gleichung 13) zu vergewissern, ob der angenommene Werth von M der Wahrheit sehr nahe entsprach, zur Entscheidung zwischen M' und M'' die Berechnung von m_0 gar nicht erfordert wird, da nur das Zeichen dieser Grösse massgebend ist. Dieses Zeichen hängt aber blos von den Factoren $tg\,\beta_2 \cos(L_2 - \frac{1}{2}[P+Q])$ und $\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}$ ab, da $Q-P$ wohl gar nie 180° erreichen kann; das Zeichen des ersten dieser Factoren ist unmittelbar gegeben und das des zweiten wird auch ohne jede weitere numerische Rechnung erkannt, sobald man weiss, ob $r_2 \lesseqgtr R_2$ ist.

Endlich möge noch hervorgehoben werden, dass, falls der Ausnahmefall nicht oder mindestens nicht sehr nahe eintritt, die Grösse des Quotienten $\frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)}$ ein einfaches Mittel abgibt, zu entscheiden, ob der Komet bei der zweiten Beobachtung innerhalb oder ausserhalb der Erdbahn stand. Je nachdem nämlich, $\frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)} \lesseqgtr 1$ ist auch $m_0 \lesseqgtr 0$ und damit das Zeichen von $\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}$ gegeben. Ich mache darauf speciell aufmerksam als auf einen guten Fingerzeig über die erste Annahme für den Werth von $\log(r_1+r_3)$ beim Beginne der Versuche.

Das hier für den Ausnahmefall vorgeschlagene Rechnungsverfahren ist demjenigen analog, welches man früher gewöhnlich beim Eintritte desselben befolgte, nur mit dem Unterschiede, dass man sich damit begnügen musste, beim Anfange der Rechnung einen sehr rohen Näherungswerth für M einzuführen, und dass in Folge dessen, wie ich mich mehrfach überzeugt habe, häufig wiederholte Annäherungen erfordert werden. Wie ich im Folgenden gleich darzuthun hoffe, wird man aber beim Rechnen nach den oben gegebenen Vorschriften, kaum je nöthig haben, eine Verbesserung von M' oder M'' vornehmen zu müssen: dies vorausgesetzt, ziehe ich den hier empfohlenen Rechnungsmechanismus, der Berechnung des Ausnahmefalles, nach der von Oppolzer in seinem trefflichen Lehrbuche gegebenen Methode vor, obwohl dabei vielleicht zuweilen die Zahl der aufzuschreibenden Ziffern oder Logarithmen um eine Kleinigkeit grösser ausfallen dürfte. Der complicirte Bau der Formeln von Oppolzer erfordert nämlich im ganzen Verlaufe der Rechnung eine beständige Aufmerksamkeit und ein beständiges Überlegen, während man nach den Formeln der Olbers'schen Methode frischweg mechanisch fortrechnen kann, so dass, selbst wenn es sich als nothwendig erweisen sollte, die Doppelrechnung mit M' und M'' nahezu bis zum Schlusse der Versuche durchzuführen, man trotzdem noch immer früher zu Ende kommen dürfte, als mit der einmaligen Durchrechnung der Formeln des Ausnahmefalles.

Die Behauptung, dass das von mir vorgeschlagene Verfahren stets auf sehr nahe richtige Werthe von M führt, will ich an drei mir bekannten Fällen erhärten, in denen der Ausnahmefall sehr nahe eintrat.

Das erste Beispiel entlehne ich dem ersten Bande von v. Oppolzer's Lehrbuche der Bahnbestimmung. Es bezieht sich auf den Kometen 1869 III; bei den zu Grunde gelegten Beobachtungen ist bei der Annahme $\Pi = L_2$ nach Oppolzer die Genauigkeit nur $\frac{1}{148}$ derjenigen, welche bei schicklicher Wahl von Π erreichbar ist; „es ist daher Olbers' Methode, die hier voraussichtlich nicht einmal eine Näherung abgeben wird, völlig unanwendbar". Die Grundlagen der Rechnung sind:

1869	Beob. Ort	Ortszeit	app. α	app. δ
Nov. 29	Wien	$10^h13^m39^s$	$22^h56^m57^s57$	$+15°28'20''0$
Dec. 4	Bonn	9 45 25	23 29 52·32	+18 23 27·9
„ 9	Krakau ...	10 44 4	0 6 22·54	+21 5 33·2

Nach Reduction von α und δ auf das mittlere Äquinoctium, Verwandeln in Länge und Breite & erhält man mit Hinzufügen des Sonnenortes

Mittl. Berl. Zeit	λ	β	L	$\log R$
Nov. 29·41785	351°46'19''9	+20°25' 9''5	247°44'44''8	9·993829
Dez. 4·42404	0 41 17·4	+19 48 37·9	252 49 40·2	9·993509
„ 9·42904	10 8 37·2	+18 38 59·1	257 51 55·4	9·993228

Diese Daten liefern nach den Formeln 7*)

$$\log p = 8\cdot764849 \qquad P = 74°18'55''2$$
$$\log q = 8\cdot791037 \qquad Q = 73\ 55\ 12\cdot4$$

Es ist hier

$$P - L_2 = 178°30'45''0$$
$$Q - L_2 = 178°54\ 27\cdot8$$

der Ausnahmefall also in der That sehr genähert eingetroffen.

Die weitere Rechnung ergibt nun:

$$\log M_0 = 9\cdot968949$$

und unter der Annahme $\Pi = 244°18'55''2$, die $P - \Pi = 190°0'0''$ liefert,

$$\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = 0\cdot016844$$

Wir haben also:

$$M' = 9\cdot985793 \qquad M'' = 9\cdot952105$$

Nun ist weiter:

$$L_2 - {}^1/_2(P+Q) = 178°42'36''4 \quad \lambda_1 - L_1 = 104° \ 1'35''1$$
$$\lambda_3 - L_3 = 112 \ 13 \ 42\cdot8$$

Wir schliessen daraus, da ψ_1 und ψ_3 grösser als 90° sind, dass $r_2 > R_2$ und daher $\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} < 0$ sei; ferner ist

$$\operatorname{tg}\beta_2 \cos(L_2 - {}^1/_2[P+Q]) < 0, \text{ folglich } m_0 > 0;$$

es wird desshalb $M_1 > M_0$, und der Werth M'' zu verwerfen sein.

v. Oppolzer fand durch die Ausführung der Rechnung nach seiner Methode

$$\log\rho_, = 9\cdot529667$$
$$\log\rho_{,,,} = 9\cdot520480$$

Der Werth von M wäre darnach $M = 9\cdot990813$ in befriedigender Übereinstimmung mit dem von uns oben ermittelten: $M' = 9\cdot985793$. Hätte man nach Olbers ohneweiters $\Pi = L_2$ angenommen, so wäre:

$$\frac{\sin(P - L_2)}{\sin(Q - L_2)} = 0\cdot144102$$

und damit:

$$M = 0\cdot113051$$

Oppolzer's Ausspruch, dass die directe Rechnung nach Olbers' Methode voraussichtlich nicht einmal einen Näherungswerth für M abgeben dürfte, hat sich daher als völlig zutreffend erwiesen.

Ebenso nahe wie der Komet 1869 III bewegte sich auch der Komet 1877 V am Anfange seiner Sichtbarkeit in einem durch den mittleren Sonnenort gehenden grössten Kreise. Die ersten Elemente für denselben berechnete der damalige Assistent und jetzige Adjunct der Wiener Sternwarte Dr. J. Holetschek. Dieselben sind im Circulare XXVII der kais. Akademie veröffentlicht, und stützen sich auf die nachstehenden Beobachtungen:

1877	Beob.-Ort	Ortszeit	app. α	app. δ
Oct. 2	Mailand....	$14^h 51^m 46^s$	$23^h 50^m 12^s 58$	$-10°35'\ 6''0$
„ 4	Wien......	9 3 24	23 43 53·93	12 29 48·2
„ 4	Kiel.......	9 35 46	23 43 34·82	12 32 23·1
„ 4	Mailand....	10 28 22	23 43 26·03	12 34 41·6
„ 4	Leipzig....	12 57 39	23 43 4·32	12 40 46·0
„ 6	Leipzig....	10 33 53	23 36 29·52	14 34 23·6
„ 6	Strassburg.	11 15 5	23 36 21·59	14 36 33·0
„ 6	Pola	13 31 24	23 36 6·65	-14 40 57·0

Es wurde zunächst das arithmetische Mittel aller an einem Tage angestellten Beobachtungen genommen, dann an die so entstandenen 3 Orte die Reduction auf den mittleren Ort angebracht, hierauf die Verwandlung in Länge und Breite ausgeführt und so schliesslich als Grundlage für die weiteren Rechnungen gewonnen.

Mittl. Berl. Zeit	λ	β	L	$\log R$
Oct. 2·62722	$353°30'\ 8''5$	$-\ 8°43'52''9$	$189°57'22''4$	9·999998
„ 4·43823	351 9 57·0	$-$ 9 53 22·0	191 44 32·9	9·999774
„ 6·49233	348 42 11·9	-11 3 38·0	193 46 15·5	9·999518

Wir haben hier:

$$\log p = 8\cdot338505 \quad P = 10°11'30''8 \quad P-L_2 = 178°26'57''1$$

$$\log q = 8\cdot353717 \quad Q = 10\ 32\ 25\cdot5 \quad Q-L_2 = 178\ 47\ 52\cdot6$$

es bestehen also wieder ganz ähnliche Verhältnisse wie beim früheren Kometen.

Es ist jetzt:

$$\log M_0 = 0\cdot042568 \qquad \lambda_1-L_1 = 163°32'46''1$$

$$L_2-{}^1/_2(P+Q) = 181°22'34''7 \quad \lambda_3-L_3 = 154\ 55\ 56\cdot4$$

also:

$$\operatorname{tg}\beta_2 \cos(L_2-{}^1/_2[P+Q]) > 0$$

$$\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3} < 0$$

$$m_0 < 0$$

und damit $M_1 < M_0$.

Setzen wir hier $\Pi = 200°11'30''8$ um $P-\Pi = 170°0'0''$ zu machen, so wird:

$$\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = 0\cdot015255$$

$$M' = 0\cdot057823 \quad M'' = 0\cdot027313$$

Wir haben also:

$$M' = 9\cdot 985793 \qquad M'' = 9\cdot 952105$$

Nun ist weiter:

$$L_2 - {}^1/_2(P+Q) = 178°42'36''4 \quad \lambda_1 - L_1 = 104°\ 1'35''1$$
$$\lambda_3 - L_3 = 112\ 13\ 42\cdot 8$$

Wir schliessen daraus, da ψ_1 und ψ_3 grösser als 90° sind, dass $r_2 > R_2$ und daher $\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} < 0$ sei; ferner ist

$$\operatorname{tg} \beta_2 \cos(L_2 - {}^1/_2[P+Q]) < 0, \text{ folglich } m_0 > 0;$$

es wird desshalb $M_1 > M_0$, und der Werth M'' zu verwerfen sein.

v. Oppolzer fand durch die Ausführung der Rechnung nach seiner Methode

$$\log \rho_{,} = 9\cdot 529667$$
$$\log \rho_{,,,} = 9\cdot 520480$$

Der Werth von M wäre darnach $M = 9\cdot 990813$ in befriedigender Übereinstimmung mit dem von uns oben ermittelten: $M' = 9\cdot 985793$. Hätte man nach Olbers ohneweiters $\Pi = L_2$ angenommen, so wäre:

$$\frac{\sin(P - L_2)}{\sin(Q - L_2)} = 0\cdot 144102$$

und damit:

$$M = 0\cdot 113051$$

Oppolzer's Ausspruch, dass die directe Rechnung nach Olbers' Methode voraussichtlich nicht einmal einen Näherungswerth für M abgeben dürfte, hat sich daher als völlig zutreffend erwiesen.

Ebenso nahe wie der Komet 1869 III bewegte sich auch der Komet 1877 V am Anfange seiner Sichtbarkeit in einem durch den mittleren Sonnenort gehenden grössten Kreise. Die ersten Elemente für denselben berechnete der damalige Assistent und jetzige Adjunct der Wiener Sternwarte Dr. J. Holetschek. Dieselben sind im Circulare XXVII der kais. Akademie veröffentlicht, und stützen sich auf die nachstehenden Beobachtungen:

1877	Beob.-Ort	Ortszeit	app. α	app. δ
Oct. 2	Mailand....	14h 51m 46s	23h 50m 12s58	−10°35' 6"0
„ 4	Wien......	9 3 24	23 43 53·93	12 29 48·2
„ 4	Kiel.......	9 35 46	23 43 34·82	12 32 23·1
„ 4	Mailand....	10 28 22	23 43 26·03	12 34 41·6
„ 4	Leipzig....	12 57 39	23 43 4·32	12 40 46·0
„ 6	Leipzig....	10 33 53	23 36 29·52	14 34 23·6
„ 6	Strassburg.	11 15 5	23 36 21·59	14 36 33·0
„ 6	Pola	13 31 24	23 36 6·65	−14 40 57·0

Es wurde zunächst das arithmetische Mittel aller an einem Tage angestellten Beobachtungen genommen, dann an die so entstandenen 3 Orte die Reduction auf den mittleren Ort angebracht, hierauf die Verwandlung in Länge und Breite ausgeführt und so schliesslich als Grundlage für die weiteren Rechnungen gewonnen.

Mittl. Berl. Zeit	λ	β	L	$\log R$
Oct. 2·62722	353°30' 8"5	− 8°43'52"9	189°57'22"4	9·999998
„ 4·43823	351 9 57·0	− 9 53 22·0	191 44 32·9	9·999774
„ 6·49233	348 42 11·9	−11 3 38·0	193 46 15·5	9·999518

Wir haben hier:

$$\log p = 8\cdot338505 \quad P = 10°11'30"8 \quad P-L_2 = 178°26'57"1$$
$$\log q = 8\cdot353717 \quad Q = 10\;32\;25\cdot5 \quad Q-L_2 = 178\;47\;52\cdot6$$

es bestehen also wieder ganz ähnliche Verhältnisse wie beim früheren Kometen.

Es ist jetzt:

$$\log M_0 = 0\cdot042568 \qquad \lambda_1 - L_1 = 163°32'46"1$$
$$L_2 - {}^1/_2(P+Q) = 181°22'34"7 \quad \lambda_3 - L_3 = 154\;55\;56\cdot4$$

also:

$$\operatorname{tg}\beta_2 \cos(L_2 - {}^1/_2[P+Q]) > 0$$
$$\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} < 0$$
$$m_0 < 0$$

und damit $M_1 < M_0$.

Setzen wir hier $\Pi = 200°11'30"8$ um $P-\Pi = 170°0'0"$ zu machen, so wird:

$$\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = 0\cdot015255$$

$$M' = 0\cdot057823 \quad M'' = 0\cdot027313$$

Dem Obigen zufolge ist jezt M'' der richtige Werth. Die Berechnung nach den für den Ausnahmefall geltenden Formeln hatte Holetschek ergeben:

$$\log \rho_1 = 9\cdot967188$$
$$\log \rho_3 = 0\cdot000241$$

Das daraus folgende M wäre $M = 0\cdot033053$, wieder mit unserem, oben gefundenen Werthe $M'' = 0\cdot027313$ für eine erste Bahnbestimmung völlig hinreichend übereinstimmend. Ohne Anwendung des von mir angegebenen Kunstgriffes, hätte man für $\Pi = L_2$ erhalten:

$$\frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)} = 0\cdot110611$$
$$M = 0\cdot153179$$

Es hätte daher auch hier die Olbers'sche Annahme $\Pi = L_2$ zu keinem Näherungswerthe geführt.

Als drittes und letztes Beispiel führen wir endlich noch den vor Kurzem erschienenen Kometen 1885 III an. Auch für diesen berechnete Dr. J. Holetschek eines der ersten bekannt gewordenen Elementensysteme. Die Grundlagen der Rechnung bildeten nach dem am 10. September 1885 ausgegebenen Circulare der kaiserlichen Akademie die folgenden Beobachtungen:

1885	Beob.-Ort	Ortszeit	app α	app δ
Sept. 2	Cambridge U. S.	9h 8m30s	13h42m28s20	+36°38' 1"0
„ 5	Wien	9 23 32	13 57 41·60	+37 56 12·0
„ 5	Paris	9 31 43	13 57 43·12	+37 56 24·6
„ 7	Wien.............	8 46 48	14 9 2·89	+38 48 0·7

Diese Beobachtungen lieferten nach Ausführung der gewöhnlichen Vorarbeiten für eine Bahnberechnung die nachstehenden 3 Orte:

Mittl. Berl. Zeit	λ	β	L	$\log R$
Sept. 2·61570	186°21'51"9	+43°16'25"8	160°41'26"0	0·003550
„ 5·38462	189 9 10·1	+45 54 32·3	163 22 38·9	0·003256
„ 7·35766	191 20 21·1	+47 45 57·4	165 17 40·8	0·003039

Wir haben hier:

$\log p = 9\cdot011361 \quad P = 339°51'54"6 \quad P-L_2 = 176°29'15"7$

$\log q = 8\cdot904972 \quad Q = 339\ 48\ 14\cdot0 \quad Q-L_2 = 176\ 25\ 35\cdot1$

Es gestaltet sich daher die Sachlage immerhin etwas günstiger, als in den beiden früheren Fällen, da die Abweichung von $P-L_2$ und $Q-L_2$ von 180° doch bereits $3^1/_2$° beträgt. Wir erhalten nun weiter:

$\log M_0 = 9\cdot993924$ $\lambda_1-L_1 = 25°40'25"9$

$L_2-{}^1/_2(P+Q) = 183°32'34"6$ $\lambda_3-L_3 = 26\ \ 2\ 40\cdot3$

Die Elongation des Kometen von der Sonne ist hier so gering, dass man daraus allein auf dessen Entfernung von derselben keinen begründeten Schluss ziehen kann. Es ist indess hier die Abweichung von $P-L_2$ und $Q-L_2$ von 180° immerhin schon so bedeutend, dass man wohl berechtigt ist, den Quotienten $\frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)}$, wenn auch nicht seinem Betrage, so doch seinem Sinne nach als richtig anzunehmen. Nun ist:

$$\frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)} = 9\cdot992497 < 1,$$

also $M_1 < M_0$ und $m_0 < 0$ zu nehmen. Es ist ferner den oben gegebenen Daten zufolge $\operatorname{tg}\beta_2 \cos[L_2-{}^1/_2(P+Q)] < 0$, daher $\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3} > 0$ oder $r_2 < R_2$. Die seinerzeit von Dr. Holetschek nach v. Oppolzer's Methode ausgeführte Rechnung bestätigt diese Schlüsse vollständig; sie lieferte $\log r_1 = 9\cdot946249$ und $\log r_3 = 9\cdot970382$; $\log \rho_1 = 0\cdot045704$ und $\log \rho_3 = 0\cdot035789$ und damit $M = 9\cdot990085$.

Prüfen wir nun unseren Kunstgriff auch an diesem Beispiele, so haben wir zu setzen $\Pi = 169°51'54"6$; es wird damit $P-\Pi = 170°0'0"$

$$\frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)} = 9\cdot997374$$

$$M' = 9\cdot991298 \quad M'' = 9\cdot996550.$$

Nach dem Obigen ist der kleinere Werth $M' = 9\cdot991298$ zu wählen, der mit $M = 9\cdot990085$ wie er aus Holetschek's Elementen folgt, ganz vortrefflich übereinstimmt.

Aus diesen drei Beispielen, und mehr wäre ich im Augenblicke nicht in der Lage zu geben, ersieht man auch noch, dass

es wohl sehr selten nöthig werden wird, mit beiden Werthen M' und M'' die Rechnung bis zum Schlusse der Versuche zu führen: in diesen drei Beispielen wäre es überhaupt gar nicht nöthig gewesen, erst eine Doppelrechnung zu beginnen, da man, wie wir sahen, in allen drei Fällen schon im Vorhinein entscheiden konnte, welcher Werth von M anzuwenden war. Man wird, glaube ich, daraus ferner ersehen, dass man bei Anwendung des von mir angegebenen Kunstgriffes wohl stets einen hinreichend genäherten Werth von M erhalten wird, um darnach ganz nach Olbers' Formeln die Rechnung ausführen zu können. Es kann wohl sein, dass es sich im Laufe der Zeit als zweckmässig erweist, die von mir vorgeschlagene Grenze von $\pm 10°$ für die Amplitude von $P-\Pi$ etwas enger oder weiter zu ziehen; allein eine bequemere Methode der Behandlung des Ausnahmefalles dürfte sich wohl nicht mehr leicht finden lassen, da sie sich ja ohnehin eigentlich in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle von der Olbers'schen Methode der Bahnbestimmung eines Kometen schon in gar nichts mehr als der Berechnung von M unterscheidet.

Zum Schlusse möge noch der Übersicht wegen eine Zusammenstellung der von mir vorgeschlagenen Formeln, und eine kurze Erläuterung des ganzen Verfahrens zur Bestimmung von M hier Platz finden.

Mit den gegebenen Daten berechne man also:

$$p \sin(P-\lambda_2) = \operatorname{tg}\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda_1)$$
$$p \cos(P-\lambda_2) = \operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2 \cos(\lambda_2-\lambda_1)$$
$$q \sin(Q-\lambda_2) = \operatorname{tg}\beta_2 \sin(\lambda_3-\lambda_2)$$
$$q \cos(Q-\lambda_2) = -\operatorname{tg}\beta_3 + \operatorname{tg}\beta_2 \cos(\lambda_3-\lambda_2)$$

$$M_0 = \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{p \cos\beta_1}{q \cos\beta_3}$$

$$m_0 = {}^1/_2\, \tau_1 \tau_2 \cdot \frac{R_2 \operatorname{tg}\beta_2 \cos[L_2 - {}^1/_2(P+Q)]}{q \cos\beta_3 \cos {}^1/_2(Q-P)} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)$$

$$M = M_0 \frac{\sin(P-\Pi)}{\sin(Q-\Pi)}.$$

Hiebei ist $\tau_1 = k(t_3-t_2)$ &, und $\log k = 8\cdot 235581$.

Weicht nun $P-L_2$ um mehr als $10°$ von $0°$ oder $180°$ ab, so kann man ohneweiters M bestimmen aus

$$M = M_0 \frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)}.$$

In diesem Falle ist es auch nicht nöthig m_0 zu berechnen, sondern nur das Zeichen des Factors $\operatorname{tg}\beta_2 \cos[L_2-{}^1/_2(P+Q)]$ zu ermitteln. Je nachdem nun

$$\frac{\sin(P-L_2)}{\sin(Q-L_2)} \lesseqgtr 1$$

ist, ist auch $m_0 \lesseqgtr 0.$

Daraus erkennt man in Verbindung mit dem Zeichen von $\operatorname{tg}\beta_2 \cos[L_2-{}^1/_2(P+Q)]$ ob $r_2 \lesseqgtr R_2$ und wird darnach beim Beginne der Versuche den Anfangswerth von $\log(r_1+r_3)$ wählen.

Weicht jedoch $P-L_2$ von $0°$ oder $180°$ um weniger als $10°$ ab, so füge man den Winkel α hinzu, um die Differenz auf diesen Grenzwerth zu bringen; sei dann

$$\frac{\sin(P-L_2+\alpha)}{\sin(Q-L_2+\alpha)} = k,$$

so bilde man sich Werthe:

$$M' = kM_0 \qquad M'' = \frac{1}{k} M_0.$$

Hat man nun keine Kriterien zu erkennen, ob $r_2 \lesseqgtr R_2$ und damit, ob $m_0 \lesseqgtr 0$ sei, in welchem Falle man für $m_0 > 0$ den grösseren, für $m_0 < 0$ den kleineren der Werthe M' oder M'', zu wählen hat, so rechne man ganz nach Olbers' Formeln mit beiden Werthen M' und M'' so lange weiter, bis man mit Sicherheit entscheiden kann, ob $r_2 \lesseqgtr R_2$ ist, und damit welcher der beiden Werthe dem Probleme entspricht, und führe dann mit diesem allein die Rechnung zu Ende.

Auch in diesem Falle bedarf man nur des Zeichens von m_0, ausser man will nach der Beendigung der Versuche sich die Beruhigung verschaffen, ob das angenommene M der Wahrheit auch sehr nahe entsprach; dann hat man zu bilden:

$$M_1 = M_0 + \frac{m_0}{\rho_1}.$$

Es dürfte sich übrigens immer empfehlen, auch wenn der Ausnahmefall nicht eintritt, die kleine Mühe der Berechnung von m_0 und M_1 nicht zu scheuen, weil die Übereinstimmung von M und M_1 eine gute Controle für alle bisherigen Rechnungen abgibt. Das zur Berechnung von m_0 nöthige r_2 erhält man mit hinreichender Genauigkeit aus:

$$r_2 = {}^1/_2(r_1+r_3) \quad \text{oder} \quad \log r_2 = {}^1/_2(\log r_1+\log r_3)$$

oder bei sehr ungleichen Zwischenzeiten etwas schärfer aus:

$$r_2 = r_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}(r_3-r_1) \text{ oder } \log r_2 = \log r_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}[\log r_3 - \log r_1].$$

Schliesslich sei bemerkt, dass sich die Berechnung von p. q, P und Q noch um eine Kleinigkeit vereinfacht, wenn man

$$p = p_0 \operatorname{tg} \beta_2; \; q = q_0 \operatorname{tg} \beta_2$$

setzt, und dass man ebenfalls eine kleine Zeitersparniss erzielt, wenn man, wie es früher gebräuchlich war, nicht die Entfernungen ρ_1 und ρ_3 selbst, sondern ihre Projectionen auf die Ekliptik ($\rho_1 \cos \beta_1$ und $\rho_3 \cos \beta_3$) als Unbekannte in das Kometenproblem einführt.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

